

## ЛЕКЦИЯ № 12

### Параметрический резонанс.

В предыдущих лекциях мы рассмотрели явление *прямого резонанса*, который возникает при учёте временной зависимости в первом члене разложения потенциальной энергии по степеням малых отклонений от положения равновесия (см. (10.1)). Учёт зависимости от времени второго слагаемого в разложении по смещениям приводит к явлению *параметрического резонанса*. Поскольку сейчас мы рассматриваем линейные колебания, то вследствие принципа суперпозиции силовое воздействие разных слагаемых можно рассматривать независимо. Таким образом, мы приходим к рассмотрению частного случая уравнения (10.2):

$$m\ddot{x} + kx = xf(t) . \quad (12.1)$$

Наиболее интересным является случай периодической зависимости от времени функции  $f(t)$ . Выберем ее в виде простой гармонической зависимости и перепишем (12.1) в виде

$$\ddot{x} + \omega_0^2(1 + h \cos(\omega t))x = 0, \quad (12.2)$$

Внешнее воздействие меняет параметр  $\omega_0$  уравнения, что определяет название *параметрический резонанс*. Параметр  $h$  в этом уравнении называется *глубиной модуляции*. Несмотря на кажущуюся простоту, это уравнение сложное из-за того, что оно представляет собой *уравнение с переменными коэффициентами*. Рассмотрение таких уравнений с разными зависимостями параметров приводит к теории целого ряда *специальных функций*. В данном случае уравнение (12.2) представляет собой *уравнение Матье*, а его решениями являются *функции Матье*. Но при рассмотрении малых колебаний можно найти приближенные решения в рамках тригонометрических функций. Нас будут интересовать в первую очередь периодические решения, и для их нахождения можно воспользоваться так называемым *резонансным приближением*. Он заключается в следующем: попытаемся найти решение в виде тригонометрической функции, такой, что при подстановке его в уравнение возникают слагаемые с разными частотами, но можно выделить основной блок слагаемых с одной частотой и наибольшей величиной. При этом слагаемые с другими частотами можно отбросить, убедившись, что их амплитуды меньше, чем у основных членов. Продемонстрируем это на уравнении (12.1). Если подставить решение в виде

$\cos(\omega t)$ , то останутся только слагаемые  $\ddot{x} + \omega_0^2 x$ , и мы приходим к тривиальному результату, не учитывающему внешнего воздействия. Но если мы подставим решение на половинной частоте, то результат будет нетривиальны. Подставим пробное решение в виде тригонометрической функции, но на половинной частоте:  $x = a \cos(\omega t / 2)$ . Получим:

$$\left( \omega_0^2 - \left( \frac{\omega}{2} \right)^2 + \frac{\omega_0^2 h}{2} \right) a \cos\left( \frac{\omega t}{2} \right) + \frac{\omega_0^2 h}{2} \cos\left( \frac{3}{2} \omega t \right). \quad (12.3)$$

Мы специально не приравняем это нулю, поскольку гармоника на половинной частоте не является точным решением исходного уравнения. Но в духе используемого резонансного приближения отбросим слагаемое с частотой, отличной от основной. Тогда получим приближенное уравнение

$$\left( \omega_0^2 - \left( \frac{\omega}{2} \right)^2 + \frac{\omega_0^2 h}{2} \right) a \cos\left( \frac{\omega t}{2} \right) = 0, \quad (12.4)$$

и зависимость частоты колебания от глубины модуляции:

$$\omega^2 \approx (2\omega_0)^2 + 2\omega_0^2 h. \quad (12.5)$$

Таким образом, в процессе колебания выделенной оказалась не частота осциллятора, а его удвоенная частота (при малых величинах параметра  $h$ ). Т.е., чтобы поддерживать такое колебание, параметрическое воздействие на осциллятор должно происходить на удвоенной его собственной частоте. Но при этом осциллятор, конечно, колеблется на своей частоте: решение  $x \approx a \cos(\omega t / 2) = a \cos(\omega_0 t)$ .

Чтобы удостовериться в справедливости резонансного приближения, надо скомпенсировать последнее слагаемое в выражении (12.3) и искать более точное решение в виде

$$x \approx a_1 \cos\left( \frac{1}{2} \omega t \right) + a_3 \cos\left( \frac{3}{2} \omega t \right). \quad (12.6)$$

Подставляя это выражение в (12.3), получим:

$$\begin{aligned} & \left( \left( \omega_0^2 - \left( \frac{\omega}{2} \right)^2 + \frac{\omega_0^2 h}{2} \right) a_1 + \frac{\omega_0^2 h}{2} a_3 \right) \cos\left( \frac{\omega t}{2} \right) + \\ & + \left( \frac{\omega_0^2 h}{2} a_1 + \left( \omega_0^2 - \left( \frac{3}{2} \omega \right)^2 \right) a_3 \right) \cos\left( \frac{3}{2} \omega t \right) + \frac{\omega_0^2 h}{2} a_3 \cos\left( \frac{5}{2} \omega t \right). \end{aligned} \quad (12.7)$$

Снова, в духе резонансного приближения отбрасываем последнее слагаемое и приравняем нулю коэффициенты при первых двух гармониках. Во второй скобке можно приближённо заменить  $\omega \rightarrow 2\omega_0$  и получить связь между амплитудами гармоник:

$$a_3 \approx a_1 \frac{h}{16}. \quad (12.8)$$

Т.е. резонансное приближение оправдано при условии малой глубины модуляции  $h \ll 1$ . Кроме того, из первого слагаемого мы получили малую добавку к зависимости частоты колебания от амплитуды внешнего воздействия:

$$\omega_a^2 \approx (2\omega_0)^2 + 2\omega_0^2 h + \frac{1}{8} \omega_0^2 h^2. \quad (12.9)$$

Следующие поправки к решению дают степенное разложение зависимости  $\omega = \omega(h)$  в ряд по малому параметру.

Решение  $x = a \cos(\omega t/2)$  – не единственно, которое может служить отправной точкой для построения стационарного возбуждения осциллятора. Выберем в качестве резонансного приближения выражение  $x = b \sin(\omega t/2)$ . Подставив в уравнение выражение

$$x \approx b_1 \sin\left(\frac{1}{2} \omega t\right) + b_3 \sin\left(\frac{3}{2} \omega t\right), \quad (12.10)$$

поучим по аналогии с (12.7)

$$\begin{aligned} & \left( \left( \omega_0^2 - \left(\frac{\omega}{2}\right)^2 - \frac{\omega_0^2 h}{2} \right) b_1 + \frac{\omega_0^2 h}{2} b_3 \right) \sin\left(\frac{\omega t}{2}\right) + \\ & + \left( \frac{\omega_0^2 h}{2} b_1 + \left( \omega_0^2 - \left(\frac{3}{2} \omega\right)^2 \right) b_3 \right) \sin\left(\frac{3}{2} \omega t\right) + \frac{\omega_0^2 h}{2} b_3 \sin\left(\frac{5}{2} \omega t\right). \end{aligned} \quad (12.11)$$

Отсюда  $b_3 \approx b_1 h/16$  и

$$\omega_b^2 \approx (2\omega_0)^2 - 2\omega_0^2 h + \frac{1}{8} \omega_0^2 h^2. \quad (12.12)$$

Зависимости (12.9) и (12.12) изображены в виде линий (a) и (b) на Рис.12.1. Таким образом, зависимости  $\omega = \omega(h)$  для стационарных колебаний вблизи удвоенной собственной частоты осциллятора появляются в первом

порядке теории возмущений по параметру  $h$ , и две полученные зависимости расходятся с полем пропорционально его величине:  $\omega_a - \omega_b \sim h$ .

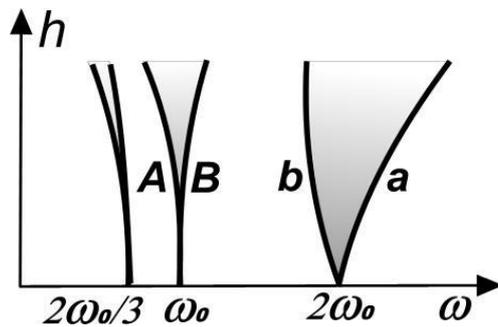


Рис.12.1

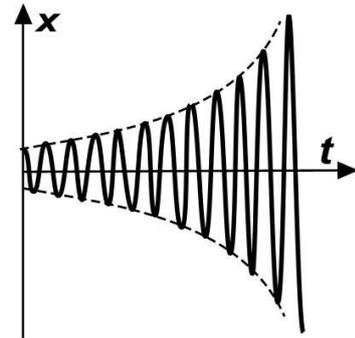


Рис.12.2

Но рассмотренная система допускает и другие, более слабые резонансы. Рассмотрим возможные стационарные колебания вблизи собственной частоты осциллятора:  $\omega \approx \omega_0$ . В этом случае подстановка решения в виде  $x = A_1 \cos(\omega t)$  при отбрасывании всех остальных гармоник дает тривиальный результат  $\omega = \omega_0$ . Но из-за слагаемого  $\omega_0^2 h \cos(\omega t)$  в (12.2) появляются дополнительные члены пропорциональные константе и удвоенной гармонике  $\cos(2\omega t)$ . Поэтому будем искать решение в виде

$$x = A_0 + A_1 \cos(\omega t) + A_2 \cos(2\omega t). \quad (12.13)$$

Его подстановка в (12.2) дает следующее:

$$\begin{aligned} & \left( \omega_0^2 A_0 + \frac{1}{2} \omega_0^2 h A_1 \right) + \left( \omega_0^2 A_1 - \omega^2 A_1 + \omega_0^2 h A_0 + \frac{1}{2} \omega_0^2 h A_2 \right) \cos(\omega t) + \\ & + \left( \omega_0^2 A_2 - 4\omega^2 A_2 + \frac{1}{2} \omega_0^2 h A_1 \right) \cos(2\omega t) + \frac{1}{2} \omega_0^2 h A_2 \cos(3\omega t) + \dots \end{aligned} \quad (12.14)$$

Из свободного слагаемого и удвоенной гармоники находим, что  $A_2 = hA_1 / 6$  и  $A_0 = -hA_1 / 2$ . Подставляя эти результаты в коэффициент при основной гармонике, получаем:

$$\omega_A^2 = \omega_0^2 - \frac{5}{12} \omega_0^2 h^2. \quad (12.15)$$

Аналогично, «стартуя» с решения  $x = B_1 \sin(\omega t)$ , при подстановке в уравнение мы видим появление слагаемого вида  $\sin(2\omega t)$ . Поэтому сразу ищем решение в виде

$$x = B_1 \sin(\omega t) + B_2 \sin(2\omega t). \quad (12.16)$$

После подстановки этого выражения в уравнение (12.2) получаем:

$$\begin{aligned} & \left( \omega_0^2 B_1 - \omega^2 B_1 + \frac{1}{2} \omega_0^2 h B_2 \right) \sin(\omega t) + \\ & + \left( \omega_0^2 B_2 - 4\omega^2 B_2 + \frac{1}{2} \omega_0^2 h B_1 \right) \sin(2\omega t) + \frac{1}{2} \omega_0^2 h B_2 \sin(3\omega t) + \dots \end{aligned} \quad (12.17)$$

Из коэффициентов для первых двух гармоник находим, что  $B_2 = hB_1/6$  и

$$\omega_B^2 = \omega_0^2 + \frac{1}{12} \omega_0^2 h^2. \quad (12.18)$$

Полученные частотные зависимости изображены на Рис.12.1 в виде линий А и В.

Рассмотренные резонансы являются первыми двумя в бесконечной последовательности на частотах  $\omega = 2\omega_0/n$ . Основной резонанс на частоте  $2\omega_0$  находится на первом шаге теории возмущений и имеет ширину  $\Delta\omega = \omega_a - \omega_b \approx \omega_0 h$ . Следующий резонанс на частоте  $\omega_0$  находится на втором шаге теории возмущения и имеет ширину  $\Delta\omega = \omega_B - \omega_A \approx \omega_0 h^2/4$ . Следующие резонансы ещё более узкие и имеют ширину  $\Delta\omega \sim \omega_0 h^n$ . Ниже мы будем рассматривать только основной резонанс в основном приближении.

До сих пор мы изучали одночастотные решения. Более общие решения легко найти, если учесть зависимость амплитуд гармоник от времени. Т.е в основном приближении представить решение в виде

$$x \approx a(t) \cos\left(\frac{1}{2} \omega t\right) + b(t) \sin\left(\frac{1}{2} \omega t\right), \quad (12.19)$$

где основное «быстрое» движение происходит с частотами  $\omega \approx \omega_0 + O(h)$ . Т.е. зависимость амплитуд  $a(t)$  и  $b(t)$  от времени – «медленные». Поэтому при подстановке (12.19) в уравнение (12.2) можно оставлять только первые производные от амплитуд. При такой подстановке в резонансном приближении получаем:

$$\frac{da}{dt} + \frac{1}{4a} (\omega^2 - \omega_b^2) b = 0, \quad (12.20)$$

$$\frac{db}{dt} - \frac{1}{4a} (\omega^2 - \omega_a^2) a = 0, \quad (12.21)$$

с  $\omega_a$  и  $\omega_b$  из (12.9) и (12.12). Подставляя в эти уравнения  $a, b \sim \exp(st)$ , находим

$$s = \pm \sqrt{(\omega_b^2 - \omega^2)(\omega^2 - \omega_a^2)} / 4\omega. \quad (12.22)$$

Таким образом, в области между линиями одночастотных решений  $a$  и  $b$  (заштрихована на Рис.12.1) имеем

$$x = (a_1 e^{\Gamma t} + a_2 e^{-\Gamma t}) \cos\left(\frac{1}{2} \omega t\right) + (b_1 e^{\Gamma t} + b_2 e^{-\Gamma t}) \sin\left(\frac{1}{2} \omega t\right), \quad (12.23)$$

$$\Gamma = \sqrt{(\omega_a^2 - \omega^2)(\omega^2 - \omega_b^2)} / 4\omega. \quad (12.24)$$

В этой области амплитуда колебаний экспоненциально возрастает, что определяет термин *параметрический резонанс* (см. Рис.12.2). Такое экспоненциальное нарастание отличает параметрический резонанс от рассмотренного ранее прямого резонанса с линейным нарастанием амплитуды (Рис.10.3). Вне заштрихованной области (вне резонансного сектора) решение имеет вид

$$x = a \cos(\Omega t + \alpha) \cos\left(\frac{1}{2} \omega t\right) + b \cos(\Omega t + \beta) \sin\left(\frac{1}{2} \omega t\right), \quad (12.25)$$

$$\Omega = \sqrt{(\omega_a^2 - \omega^2)(\omega_b^2 - \omega^2)} / 4\omega. \quad (12.26)$$

Эти решения являются двухчастотными и характеризуются несоизмеримыми частотами  $\nu_{1,2} = \omega/2 \pm \Omega$ .

Рассмотрим явление параметрического резонанса в общем случае произвольной периодической зависимости параметров уравнения:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + f(t)x = 0, \quad (12.27)$$

где  $f(t)$  – периодическая функция времени с периодом  $T = 2\pi/\omega$  и соответствующей частотой  $\omega$ , зависящая от некоторых параметров, например, глубины модуляции возбуждения. (Это уравнение называется *уравнением Хилла*). Таким образом,  $f(t+T) = f(t)$ . Если  $p(t)$  и  $q(t)$  – фундаментальная система решений (12.27), то общее решение имеет вид  $x(t) = Ap(t) + Bq(t)$ . Поскольку уравнение (12.27) в моменты времени  $t$  и  $t+T$  совпадают, то решение в момент времени  $t+T$  выражаются через  $p(t)$  и  $q(t)$ :

$$p(t+T) = \alpha_1 p(t) + \alpha_2 q(t), \quad q(t+T) = \beta_1 p(t) + \beta_2 q(t), \quad (12.28)$$

где  $\alpha_i$  и  $\beta_i$  – вполне определенные числа, зависящие от вида функции  $f$  и частоты  $\omega$ . Например, в предыдущем примере приближенно

фундаментальная система решений в области двухчастотных решений имела вид  $p \approx \cos(\nu_1 t)$  и  $q \approx \sin(\nu_1 t)$ . При этом константы  $\alpha_i$  и  $\beta_i$  имеют вид:  $\alpha_1 = \cos(\nu_1 T)$ ,  $\alpha_2 = -\sin(\nu_1 T)$ ,  $\beta_1 = \sin(\nu_1 T)$  и  $\beta_2 = \cos(\nu_1 T)$ . Можно ли выбрать такие комбинации  $p(t)$  и  $q(t)$ , т.е. константы  $A$  и  $B$ , чтобы полученные решения переходили сами в себя с точностью до множителя:  $x(t+T) = \mu x(t)$ ? Да, можно. Пусть

$$x(t+T) = Ap(t+T) + Bq(t+T) = A(\alpha_1 p(t) + \alpha_2 q) + B(\beta_1 p + \beta_2 q(t)) = \mu(Ap(t) + B(t)) \quad (12.29)$$

Приравнивая нулю коэффициенты при  $p(t)$  и  $q(t)$ , получаем систему уравнений для  $A$  и  $B$ :

$$(\alpha_1 - \mu)A + \beta_1 B = 0, \quad (\beta_2 - \mu)B + \alpha_2 A = 0. \quad (12.30)$$

Из нее находим значения параметра  $\mu$  и соответствующие соотношения амплитуд  $A$  и  $B$ :

$$\mu = \left( \beta_2 + \alpha_1 \pm \sqrt{(\beta_2 - \alpha_1)^2 + 4\alpha_2 \beta_1} \right) / 2, \quad (12.31)$$

$$B = A \left( \beta_2 - \alpha_1 \pm \sqrt{(\beta_2 - \alpha_1)^2 + 4\alpha_2 \beta_1} \right) / 2\beta_1. \quad (12.32)$$

Итак, можно выбрать две такие комбинации фундаментальных решений  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$ , преобразования которых при изменении  $t$  на  $t+T$  выглядят так:

$$x_1(t+T) = \mu_1 x_1(t), \quad x_2(t+T) = \mu_2 x_2(t). \quad (12.33)$$

Общий вид решений, обладающих этим свойством, такой:

$$x_1(t) = \mu_1^{t/T} \Pi_1(t), \quad x_2(t) = \mu_2^{t/T} \Pi_2(t), \quad (12.34)$$

где  $\Pi_i(t)$  – чисто периодические функции времени с периодом  $T$ . Константы  $\mu_1$  и  $\mu_2$  связаны определённым соотношением. Найдём его. Умножим уравнения

$$\ddot{x}_1 + f(t)x_1 = 0, \quad \ddot{x}_2 + f(t)x_2 = 0, \quad (12.35)$$

соответственно на  $\dot{x}_2$  и  $\dot{x}_1$  и вычтем полученное друг из друга. Получим

$$\frac{d}{dt}(\dot{x}_1 x_2 - \dot{x}_2 x_1) = 0 \quad \text{или} \quad (\dot{x}_1 x_2 - \dot{x}_2 x_1) = const. \quad (12.36)$$

Подставляя выражения (12.34) в (12.36) получаем

$$(\mu_1 \mu_2)^{t/T} (\dot{\Pi}_1 \Pi_2 - \dot{\Pi}_2 \Pi_1 + \Pi_1 \Pi_2 \ln(\mu_1 / \mu_2) / T). \quad (12.37)$$

Для того, чтобы эта величина совпадала при  $t = 0$  и  $t = T$  необходимо, чтобы выполнялось соотношение между  $\mu_i$ :

$$\mu_1 \mu_2 = 1. \quad (12.38)$$

Если рассматривать вещественные решения вещественного уравнения (12.2), то в соотношениях (12.28) все коэффициенты  $\alpha_i$  и  $\beta_i$  – вещественны, но константы  $\mu_i$  в (12.31) могут быть либо вещественные либо комплексно сопряженные в зависимости от знака подкоренного выражения. В первом случае из (12.38) следует, что  $\mu_1 = 1 / \mu_2$ , т.е. в этом случае

$$x_1 = e^{\pm \Gamma t} \Pi_1(t), \quad x_2 = e^{\mp \Gamma t} \Pi_2(t), \quad \Gamma = \ln(\mu) / T. \quad (12.39)$$

Эти решения обобщают приближенные решения (12.23) в области параметрического резонанса.

Другая возможность возникает при отрицательном подкоренном выражении в (12.31) При этом  $\mu_{1,2} = R \pm iI$ . Учитывая (12.38) получаем решения, обобщающие (12.25):

$$x_1 = e^{\pm i \Omega t} \Pi_1(t), \quad x_2 = e^{\mp i \Omega t} \Pi_2(t), \quad \Omega = \arctg(I / R) / T. \quad (12.40)$$

Расположение возможных значений комплексных параметров  $\mu_i$  изображено на Рис.12.3.

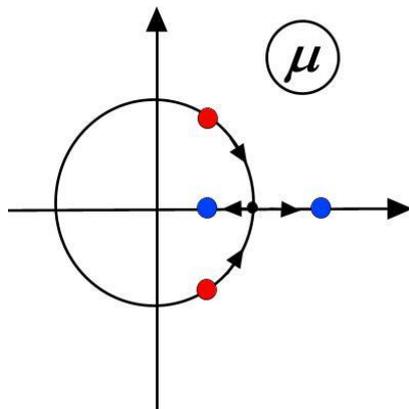


Рис.12.3

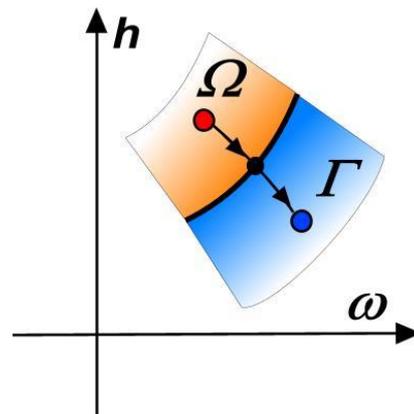


Рис.12.4

Меняя параметры системы, например, частоту внешнего воздействия  $\omega$  и глубину модуляции параметра  $h$ , мы меняем параметры  $\mu_i$ . На плоскости комплексных  $\mu$  они перемещаются вдоль окружности единичного радиуса на Рис.12.3, достигают вещественно оси и расходятся вдоль нее в разные

стороны от единицы. На плоскости параметров (Рис.12.4) изображающая точка решений из области двухчастотных решений ( $\Omega$ ) переходит в область экспоненциально растущих ( $\Gamma$ ), пересекая границу на линии, отвечающей одночастотным решениям. Частный случай общей картины на Рис.12.4 соответствует Рис.12.1 для уравнения Матье.